Αρνητική Διωνυμική Κατανομή ή Κατανομή Pascal

(Γενικεύει τη Γεωμετρική Κατανομή)

Όπως και στην γεωμετρική κατανομή θεωρούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli (επαναλήψεων) με αμετάβλητη πιθανότητα E, $p = P(E)$, $0<p<1$

Στη γεωμετρική κατανομή ενδιαφερόμαστε για το πλήθος των επαναλήψεων μέχρι την 1η επιτυχία.

Τώρα ενδιαφερόμαστε για ~~το~~ το πλήθος των επαναλήψεων μέχρι την κ-επιτυχία. $\kappa = 1, 2, \dots$

Έστω X το πλήθος των δοκιμών Bernoulli (επαναλήψεων) μέχρι να εμφανιστεί η κ-επιτυχία. Η X είναι μια τ.μ. με τιμές $x = \kappa, \kappa+1, \kappa+2, \dots$

Η X είναι διακριτή και αρκεί να βρω την σ.π $p_X(x)$

Αποδεικνύεται ότι η σ.π της X είναι $p_X(x) = \binom{x-1}{\kappa-1} p^{\kappa} q^{x-\kappa}$, $x = \kappa, \kappa+1, \dots$

με $q = 1-p$, $q = P(A)$ (Αποτυχία)

Αποδεικνύεται ότι η p_X είναι σ.π δηλ ① $p_X(x) \geq 0$

② $\sum_{x=\kappa}^{\infty} p_X(x) = 1$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τ.μ. X λέγεται αρνητική διωνυμική με παραμέτρους κ και p ($\kappa = 1, 2, \dots$) ($0<p<1$) αν οι δυνατές τιμές της X είναι $\kappa, \kappa+1, \dots$

και η σ.π. $p_X(x) = \binom{x-1}{\kappa-1} p^{\kappa} (1-p)^{x-\kappa}$

Συμβολισμός : $X \sim NB(\kappa, p)$

Αν $r=1$ τότε $NB(r=1,p) \underset{\text{ταυτίζεται}}{\equiv} Geo(p)$

Παράδειγμα

Ζάρι ρίχνεται επαναληπτικά. Ποια η πιθανότητα η $4^η$ εμφάνιση άρτιου αποτελέσματος να συμβεί στην $10^η$ ρίψη.

<u>Λύση</u>

Έστω $E = \{$το αποτέλεσμα να είναι άρτιος$\}$

Έστω τ.μ. X παριστά το πλήθος των ρίψεων μέχρι την $4^η$ E.

Τότε $X \sim NB\left(\kappa=4,\ p=P(E)=\frac{1}{2}\right)$

Ζητώ $P(X=10) = p_X(10) = \binom{10-1}{4-1}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-4}$

<u>Κατανομή Poisson (~1837)</u>

Ιστορικά προέκυψε από το όριο της διωνυμικής κατανομής

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>

Έστω τ.μ. $X \sim B(n, p_n)$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty} (np_n)$

Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} p_X(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{x} p_n^x (1-p_n)^{n-x} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{\lambda!}$, $x = 0,1,2,\dots$

$\boxed{\text{Απόδειξη}}$

Στηρίζεται:

Αν $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x_n}{n}\right)^n = e^x$

Παρατήρηση

1) $\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \geq 0 \quad \forall x=0,1,2,\dots$

2) $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$

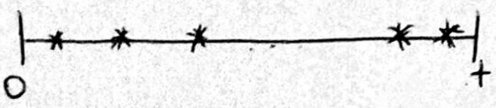
Άρα η $p_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ για $x=0,1,2,\dots$ ικανοποιεί τις ιδιότητες της σ.π
Συνεπώς η p_X είναι μια σ.π

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τ.μ. X λέγεται Poisson με παράμετρο λ ($\lambda>0$) αν οι δυνατές τιμές της X είναι $x=0,1,2,\dots$ και η σ.π $p_X(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ $x=0,1,2,\dots$

Συμβολισμός $X\sim P(\lambda)$ ή $X\sim \text{Poisson}(\lambda)$

Διαδικασία Poisson



$*$ = Αφίξεις στη διαδικασία Poisson

Ενδιαφέρει το πλήθος των αφίξεων, έστω $X(t)$, στο διάστημα $[0,t]$

Το $X(t)$ είναι τ.μ. με τιμές $x=0,1,2,\dots$

Παρατήρηση

- Αν το t είναι συγκεκριμένο τότε η $X(t)$ είναι τ.μ.
- Αν το t δεν είναι συγκεκριμένο τότε η $X(t)$ είναι μια στοχαστική διαδικασία

Αρκεί να βρω την σ.π της τ.μ $X(t)$ που έχει τιμές $x=0,1,2,\ldots$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $X(t)$ τ.μ που παριστά το πλήθος των αφίξεων σε μια διαδικασία Poisson. Τότε (υπό κάποιες προϋποθέσεις) η $X(t)$ ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λt και συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X(t)=x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \quad x=0,1,2,\ldots$$

Παρατήρηση

1) Αν $t=1$ είναι η μονάδα του χρόνου τότε η $X(t)$ συμβολίζεται με X και $P(X=x) = P_X(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ $x=0,1,2,\ldots$

2) Φυσική ερμηνεία της παραμέτρου λ. Το λ εκφράζει το ρυθμό αφίξεων στη μονάδα του χρόνου.

Παράδειγμα.

1) Είναι γνωστό από προηγούμενες μελέτες ότι ο αριθμός κλήσεων στο κέντρο εξυπηρέτησης πελατών μιας εταιρίας είναι 30 κλήσεις ανά ώρα.

α. Ποια η πιθανότητα καμίας κλήσης σε διάστημα 3 λεπτών?

β. Ποια η πιθανότητα περισσότερων από 5 κλήσεις σε διάστημα 5 λεπτών?